TD 20 : Systèmes linéaires

Résolution de systèmes linéaires

1 ★ Résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+x=0 \end{cases}$$

Étonnant, non ?

2 ★ Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+iy+(1+i)z=0 \\ x-y+4iz=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z-t=2 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+y-z=-2 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

3 ★☆ Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que le système suivant soit compatible :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+4y-3z=-2 \\ -x-3y+4z=m \end{cases}$$

4 ★★☆ Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre le système suivant (en discutant selon la valeur de a) :

$$\begin{cases} x-ay+a^2z=a \\ ax-a^2y+az=1 \\ ax+y-a^3z=1 \end{cases}$$

5 ★★☆ Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant (en discutant selon les valeurs de a,b,c,d) :

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ ax+by+cz+dt=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2t=1 \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3t=1 \end{cases}$$

6 ★★★ Résoudre le système $\begin{cases} x^3y^2z^6 &= 1 \\ x^4y^5z^{12} &= e \\ x^2y^2z^5 &= e^2 \end{cases}$ ...

1) ... dans le cas où x,y,z sont des réels strictement positifs.
2) ... dans le cas où x,y,z sont des complexes.

Applications des systèmes linéaires

7 ★★ Déterminer tous les polynômes P de degré au plus 3 tels que $P(0)=-2$, $P(1)=2$ et $P(2)=3$.

8 ★★ Montrer qu'il existe un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout polynôme P de degré au plus 2 :

$$\int_1^3 P(t)dt = \alpha P(1)+\beta P(2)+\gamma P(3)$$

Calcul effectif de l'inverse

9 ★ (*Classique !*) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.
3) Exprimer A en fonction de D et de P.
4) En déduire A^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

10 ★☆ Déterminer si les matrices ci-dessous sont inversibles et, lorsque c'est le cas, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \in \mathbb{R}$$

Pour F_m, on donnera uniquement les valeurs de m pour lesquelles la matrice F_m est inversible, sans calculer son inverse.